**8.1.** На гоночном треке в виде большой окружности боксы команд А и B расположены в диаметрально противоположных точках трека. Из боксов по треку навстречу друг другу выезжают две машины, причем каждая движется по треку с постоянной скоростью. Первая их встреча произошла на расстоянии *L*1 = 300 м от бокса команды A (расстояние измеряется по трассе трека). Проехав мимо друг друга, они продолжают движение, и следующая их встреча состоялась на расстоянии *L*2 = 180 м от бокса команды B. Определите возможную длину трека *L*.

*Решение.*

***Вариант 1.***

*Заметим*, что от начала движения к моменту первой встречи обе машины *суммарно* прошли расстояние *L*/2, а ко второй – 3*L*/2. Поскольку промежутки времени одинаковы для обеих машин, то каждая из них к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние *L*1, а до второй – . Отсюда:

; (1)

. (2)

Возможная длина трека – 1440 м.

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние *L*1, а до второй – . Отсюда:

; (3)

. (4)

Возможная длина трека – 2160 м.

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние *L*1, а до второй – . Отсюда:

; (5)

. (6)

Возможная длина трека – 720 м.

*Примечание*: распространенная ошибка – расстояние *L* до момента второй встречи.

***Разбалловка варианта 1***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Определено суммарное расстояние *L*/2 до 1-й встречи. | 1 |
| 2 | Определено суммарное расстояние 3*L*/2 до 2-й встречи  При значении *L* за этот пункт и за числовой ответ для длин трека (п. 6, 8, 10) ставим 0 баллов, за остальные пункты при правильной логике решения баллы не снимаем (итого **6 баллов** за задачу). | 1 |
| 3 | Получен вывод, что каждая из машин к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой. | 1 |
| 4 | Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека | 1 |
| 5 | Рассмотрен случай (А) | 1 |
| 6 | Получена длина трека 1440 м | 1 |
| 7 | Рассмотрен случай (Б) | 1 |
| 8 | Получена длина трека 2160 м | 1 |
| 9 | Рассмотрен случай (В) | 1 |
| 10 | Получена длина трека 720 м | 1 |
|  | **Сумма** | **10** |

***Вариант 2.***

Пусть *υ*1 – скорость первой машины из бокса команды A, *υ*2 – скорость второй машины из бокса команды B, *τ*1 – время от начала движения до первой встречи, *τ*2 – до второй встречи.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Для первой встречи:

; (1а)

; (2а)

Для второй встречи (от начала движения):

; (3а)

. (4а)

Сложим уравнения (1а) и (2а):

. (5а)

Сложим уравнения (3а) и (4а):

. (6а)

Отсюда, разделив (6а) на (5а):

. (7а)

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3а) на уравнение (1а):

. (8а)

Отсюда

= 1440 м. (9а)

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Тогда для первой встречи:

; (1б)

; (2б)

Для второй встречи (от начала движения):

; (3б)

. (4б)

Сложим уравнения (1б) и (2б):

. (5б)

Сложим уравнения (3б) и (4б):

. (6б)

Отсюда, разделив (6б) на (5б):

. (7б)

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3б) на уравнение (1б):

. (8б)

Отсюда

= 2160 м. (9б)

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Тогда для первой встречи:

; (1в)

; (2в)

Для второй встречи (от начала движения):

; (3в)

. (4в)

Сложим уравнения (1в) и (2в):

. (5в)

Сложим уравнения (3в) и (4в):

. (6в)

Отсюда, разделив (6в) на (5в):

. (7в)

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3в) на уравнение (1в):

. (8в)

Отсюда

= 720 м. (9в)

***Разбалловка варианта 2***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
| 1 | Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека | 1 |
| 2 | Для случая (А) записаны уравнения (1а)-(4а) | 1 |
| 3 | Записано уравнение (8а) | 1 |
| 4 | Получена длина трека 1440 м | 1 |
| 5 | Для случая (Б) записаны уравнения (1б)-(4б) | 1 |
| 6 | Записано уравнение (8б) | 1 |
| 7 | Получена длина трека 2160 м | 1 |
| 8 | Для случая (В) записаны уравнения (1в)-(4в) | 1 |
| 9 | Записано уравнение (8в) | 1 |
| 10 | Получена длина трека 720 м | 1 |
|  | **Сумма** | **10** |